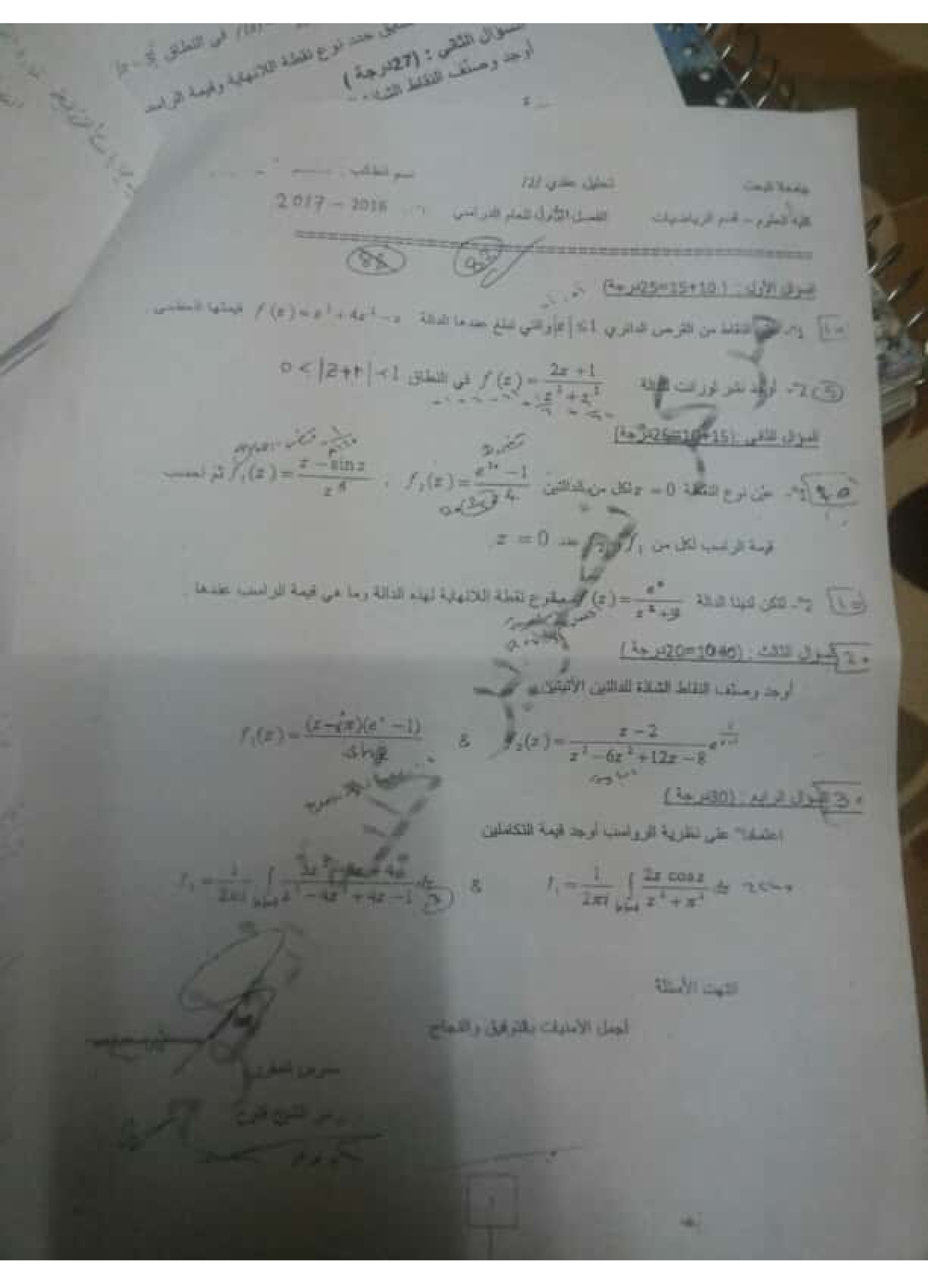


جامعة البعث — تحليل عقدي (2) — اسم الطالب: ...

كلية العلوم – قسم الرياضيات — الفصل الأول العام الدراسي — 2017 - 2016

السؤال الأول: (25=15+10 درجة)

1- عيّن النقاط من القرص الدائري $|z|\le 1$ والتي تبلغ عندها الدالة $f(z)=z^3+4z^2-\dots$ قيمتها العظمى.

2- أوجد نشر لورانت للدالة $f(z)=\frac{2z+1}{z^3+z^2}$ في النطاق $0<|z+1|<1$

السؤال الثاني: (25=10+15 درجة)

1- عيّن نوع النقطة $z=0$ لكل من الدالتين $f_1(z)=\frac{e^{3z}-1}{z^4}$ ، $f_2(z)=\frac{z-\sin z}{z^6}$ ثم احسب قيمة الراسب لكل من f_1, f_2 عند $z=0$

2- لتكن لدينا الدالة $f(z)=\frac{e^z}{z^2+9}$ ... المقرونة بنقطة اللانهاية لهذه الدالة وما هي قيمة الراسب عندها.

السؤال الثالث: (20=10+10 درجة)

أوجد وصنّف النقاط الشاذة للدالتين الآتيتين:

$$f_1(z)=\frac{(z-i\pi)(e^z-1)}{\sinh z} \quad \& \quad f_2(z)=\frac{z-2}{z^3-6z^2+12z-8}e^{\frac{1}{z-2}}$$

السؤال الرابع: (30 درجة)

اعتماداً على نظرية الرواسب أوجد قيمة التكاملين

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4}\frac{2z\cos z}{z^2+\pi^2}dz \quad \& \quad I_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2}\frac{3z^2-8z+4}{z^3-4z^2+4z-1}dz$$

انتهت الأسئلة

أجمل الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر

الإجابات النموذجية لمادة التحليل العقدي ٣٠٣

الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٦/٢٠١٧

لطلاب السنة الثالثة رياضيات

جواب السؤال الأول (25 = 15 + 10) درجة

(١٥) : [illegible] دالة كثيرة حدود [illegible] دالة تحليلية [illegible] على الدائرة $|z| = 1$ [illegible] القيمة العظمى لـ $|f(z)|$ على $|z| \le 1$ [illegible] نقطة من نقاط [illegible] 3

$z = e^{i\theta} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$f(z) = e^{3i\theta} + 4e^{2i\theta} - e^{i\theta}$, $\overline{f(z)} = e^{-3i\theta} + 4e^{-2i\theta} - e^{-i\theta}$

$|f(z)|^2 = f(z)\,\overline{f(z)} = 1 + 4e^{i\theta} - e^{2i\theta} + 4e^{-i\theta} + 16 - 4e^{i\theta} - e^{-2i\theta} - 4e^{-i\theta} + 1$

$|f(z)|^2 = 18 - (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) = 18 - 2\cos 2\theta$ 3

لكن $-1 \le \cos 2\theta \le 1 \Rightarrow 16 \le 18 - 2\cos 2\theta \le 20$

أعظمية

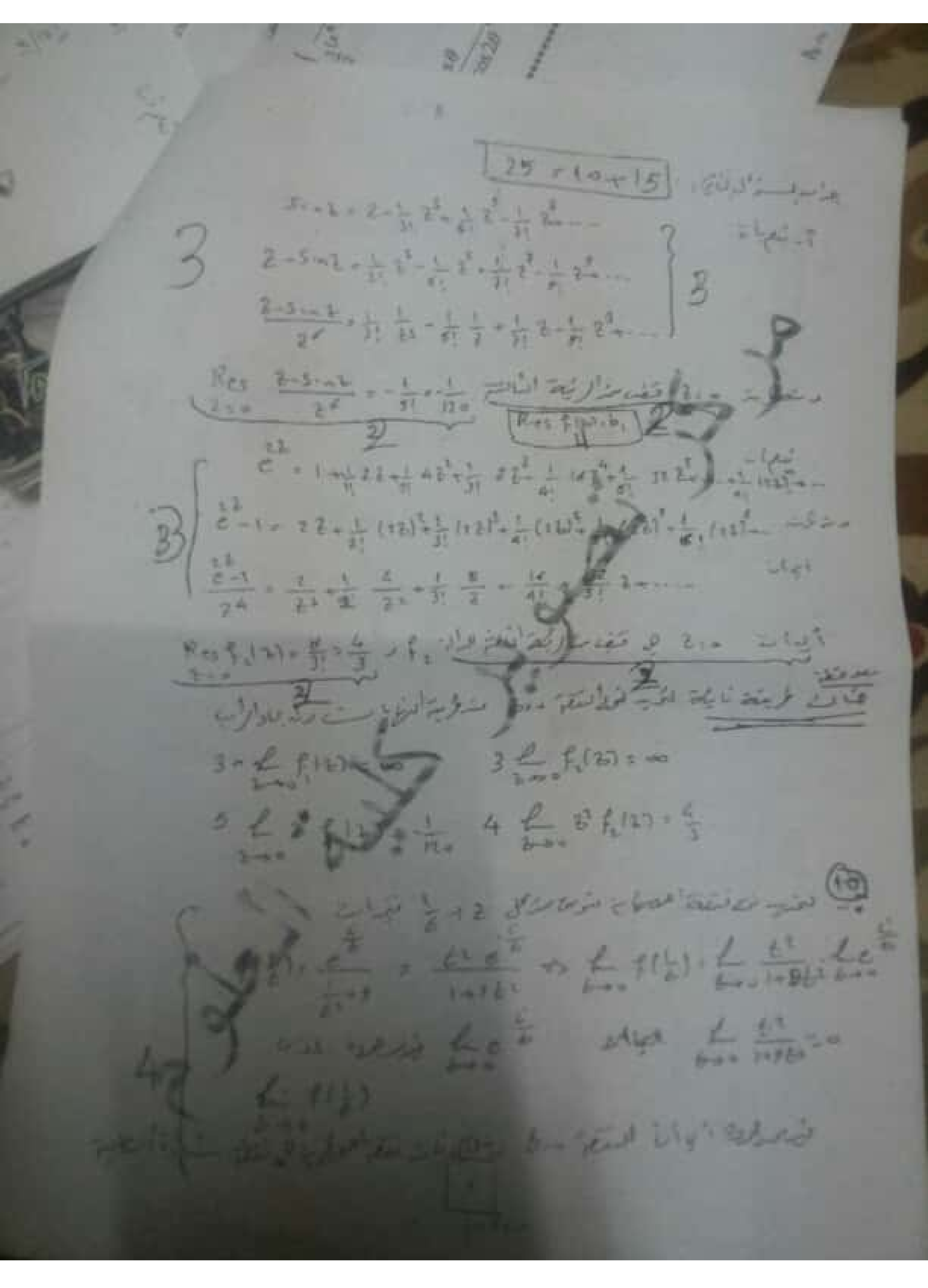
$18 - 2\cos 2\theta = 20 \Rightarrow \cos 2\theta = -1$ 2

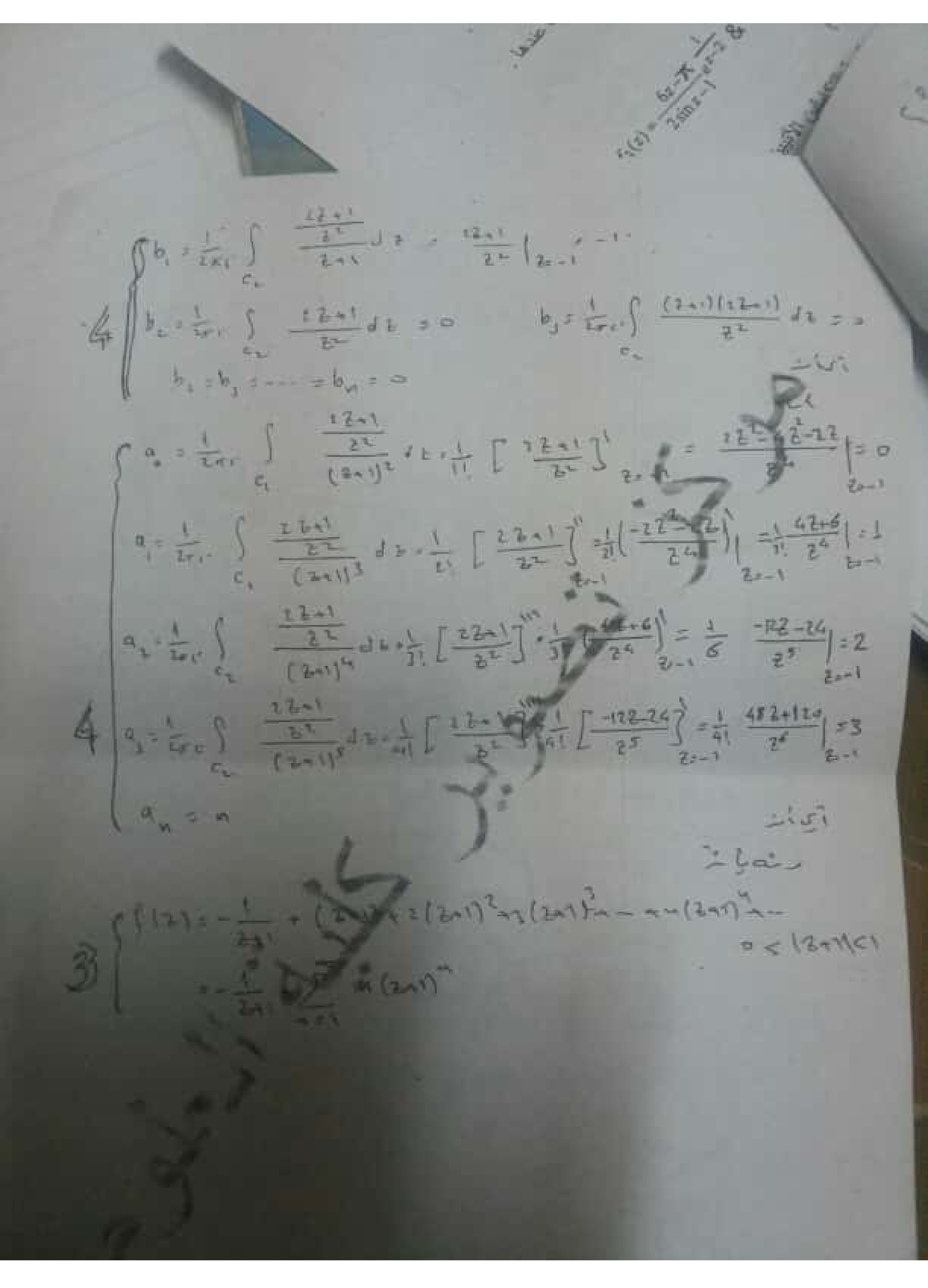
$\Rightarrow 2\theta = \pi + 2n\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$

الـ $n = 0$ بأخذ $\theta = \frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi]$

الـ $n = 1$ بأخذ $\theta = \frac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi]$

وهي النقاط [illegible] على محيط الدائرة $|z| = 1$ التي [illegible]





4

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\frac{2z+1}{z^2}}{z+1}\,dz = \frac{2z+1}{z^2}\Big|_{z=-1} = -1$$

$$b_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{2z+1}{z^2}\,dz = 0 \qquad b_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{(z+1)(2z+1)}{z^2}\,dz = 0$$

$$b_2 = b_3 = \dots = b_n = 0$$

4

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{2z+1}{z^2}}{(z+1)^2}\,dz = \frac{1}{1!}\left[\frac{2z+1}{z^2}\right]'_{z=-1} = \frac{2z^2-4z^2-2z}{z^4}\Big|_{z=-1} = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\frac{2z+1}{z^2}}{(z+1)^3}\,dz = \frac{1}{2!}\left[\frac{2z+1}{z^2}\right]''_{z=-1} = \frac{1}{2!}\left(\frac{-2z^2-2z}{z^4}\right)'\Big|_{z=-1} = \frac{1}{1!}\,\frac{4z+6}{z^4}\Big|_{z=-1} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\frac{2z+1}{z^2}}{(z+1)^4}\,dz = \frac{1}{3!}\left[\frac{2z+1}{z^2}\right]''' = \frac{1}{3!}\left(\frac{4z+6}{z^4}\right)'\Big|_{z=-1} = \frac{1}{6}\,\frac{-12z-24}{z^5}\Big|_{z=-1} = 2$$

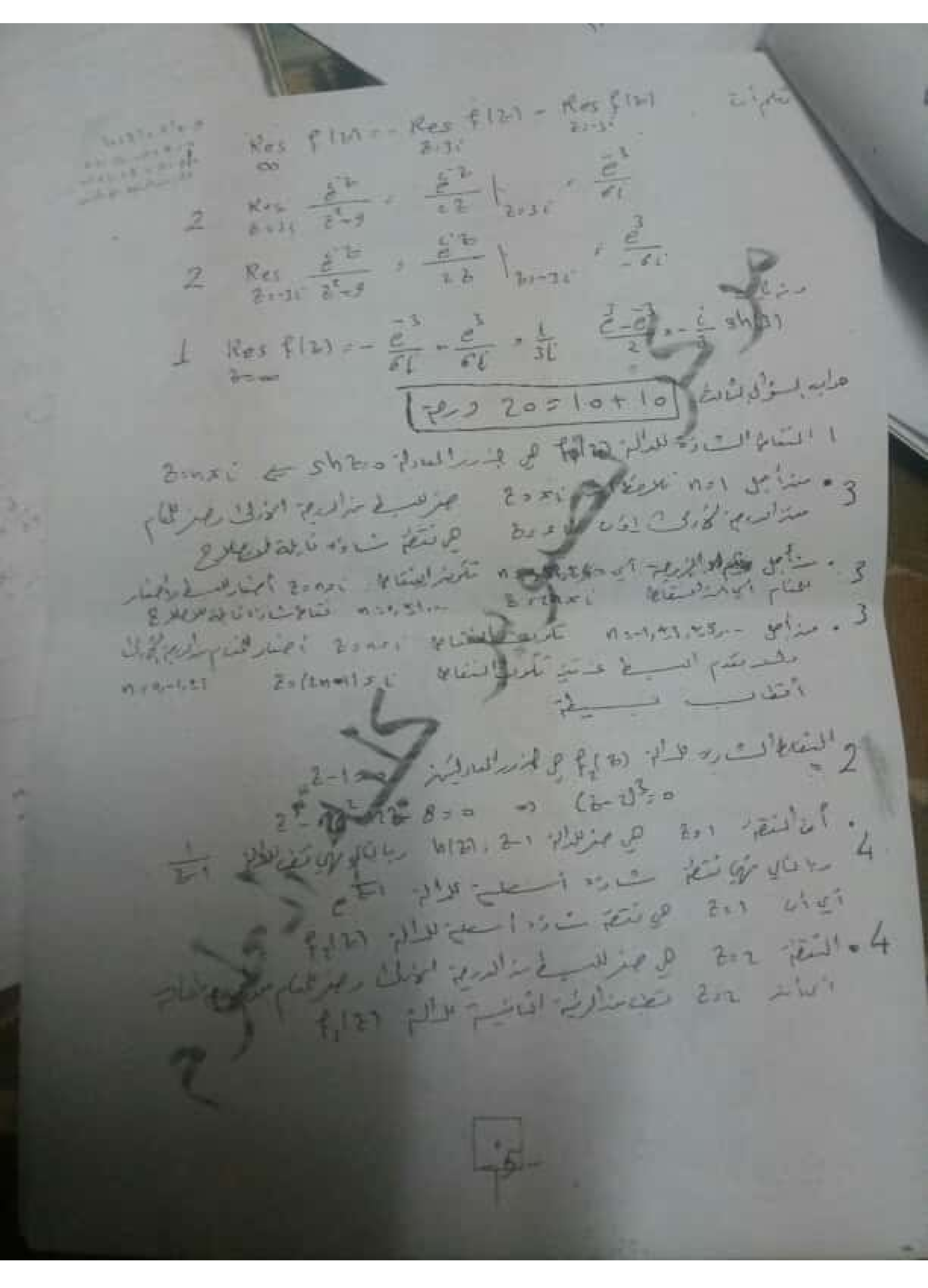
$$a_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{\frac{2z+1}{z^2}}{(z+1)^5}\,dz = \frac{1}{4!}\left[\frac{2z+1}{z^2}\right]'''' = \frac{1}{4!}\left[\frac{-12z-24}{z^5}\right]'_{z=-1} = \frac{1}{4!}\,\frac{48z+120}{z^6}\Big|_{z=-1} = 3$$

$$a_n = n$$

3

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} + (z+1) + 2(z+1)^2 + 3(z+1)^3 + \dots + n(z+1)^n + \dots \qquad 0 < |z+1| < 1$$

$$= -\frac{1}{z+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n(z+1)^n$$



$$\operatorname{Res}_{\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=3i} f(z) - \operatorname{Res}_{z=-3i} f(z)$$

2 $$\operatorname{Res}_{z=3i} \frac{e^{iz}}{z^2+9} = \frac{e^{iz}}{2z}\Big|_{z=3i} = \frac{e^{-3}}{6i}$$

2 $$\operatorname{Res}_{z=-3i} \frac{e^{iz}}{z^2+9} = \frac{e^{iz}}{2z}\Big|_{z=-3i} = \frac{e^{3}}{-6i}$$

1 $$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{e^{-3}}{6i} - \frac{e^{3}}{-6i} = \frac{1}{3i}\,\frac{e^{3}-e^{-3}}{2} = -\frac{i}{3}\,sh(3)$$

جواب السؤال الثالث

20 = 10 + 10 درجة

1. النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)$ في المستوي العقدي هي جذور المعادلة $sh\,z = 0$ أي $z = n\pi i$

3 • من أجل $n = 1$ نقطة $z = \pi i$ صفر بسيط من الدرجة الأولى وصفر للبسط، هي نقطة شاذة قابلة للإزالة

3 • من أجل ... $z = n\pi i$ ... أصفار بسيطة ... نقاط شاذة ...

3 • من أجل $n = -1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ ... $z = (2n+1)\pi i$ ... أقطاب بسيطة

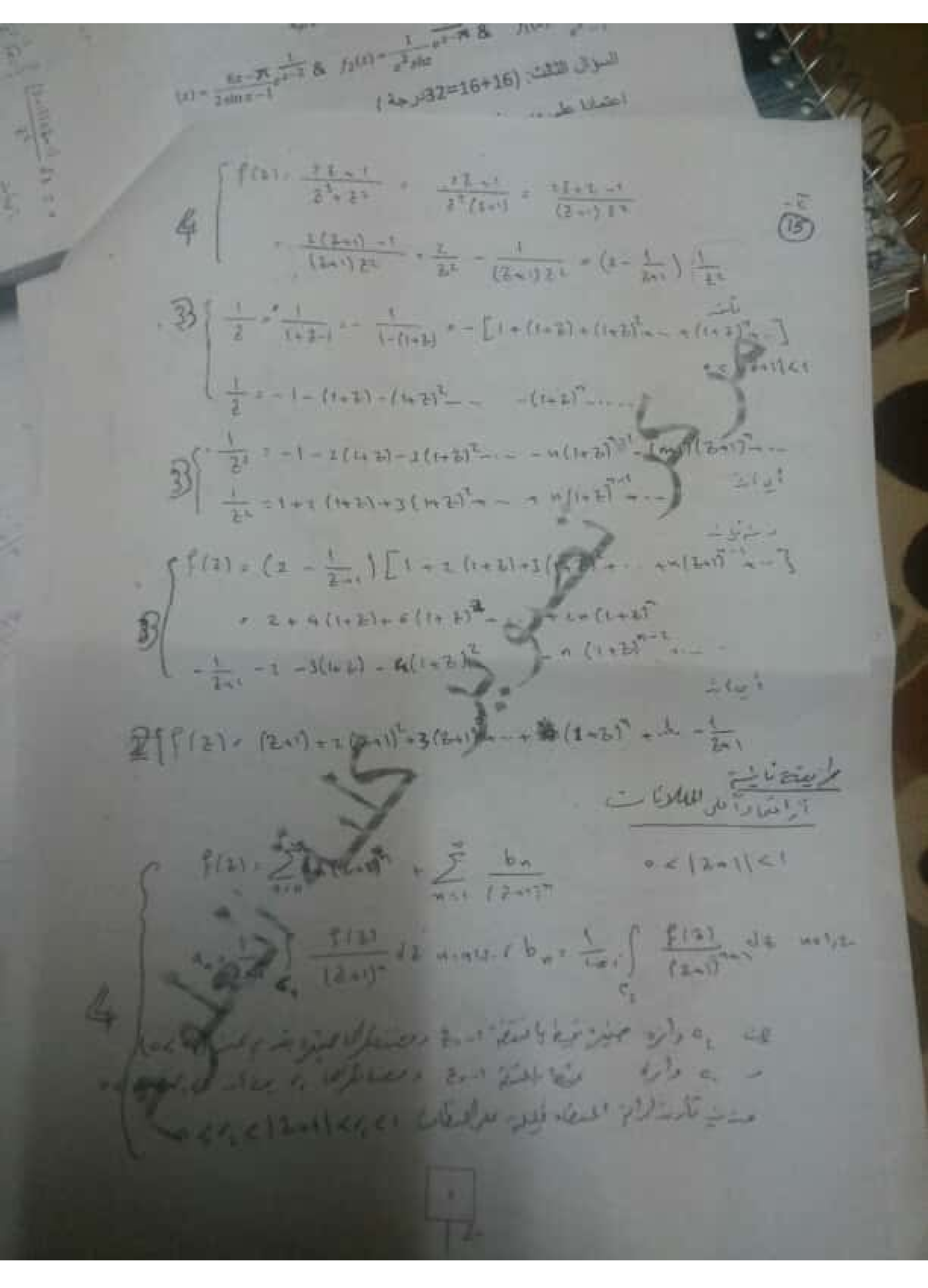
2. النقاط الشاذة للدالة $f_2(z)$ في المستوي العقدي ... $(z-2)^3 = 0$

$z^3 - \ldots = 0$

4 • أما النقطة $z = 1$ هي صفر للدالة ... $\frac{1}{z-1}$ ... $e^{\frac{1}{z-1}}$ ... أي أن $z = 1$ هي نقطة شاذة أساسية للدالة

4 • النقطة $z = 2$ هي صفر للبسط من الدرجة ... وصفر للمقام ... $z = 2$ ... الدالة $f_2(z)$

5



السؤال الثالث: (32=16+16 درجة)

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^3+z^2}=\frac{2z+1}{z^2(z+1)}=\frac{2z+2-1}{(z+1)z^2}$$

$$=\frac{2(z+1)-1}{(z+1)z^2}=\frac{2}{z^2}-\frac{1}{(z+1)z^2}=\left(2-\frac{1}{z+1}\right)\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+z-1}=-\frac{1}{1-(1+z)}=-\left[1+(1+z)+(1+z)^2+\dots+(1+z)^n+\dots\right] \quad 0<|z+1|<1$$

$$\frac{1}{z}=-1-(1+z)-(1+z)^2-\dots-(1+z)^n-\dots$$

$$-\frac{1}{z^2}=-1-2(1+z)-3(1+z)^2-\dots-n(1+z)^{n-1}-\dots$$

$$\frac{1}{z^2}=1+2(1+z)+3(1+z)^2+\dots+n(1+z)^{n-1}+\dots$$

$$f(z)=\left(2-\frac{1}{z+1}\right)\left[1+2(1+z)+3(1+z)^2+\dots+n(z+1)^{n-1}+\dots\right]$$

$$=2+4(1+z)+6(1+z)^2+\dots+2n(1+z)^{n-1}$$

$$-\frac{1}{z+1}-2-3(1+z)-4(1+z)^2-\dots-n(1+z)^{n-2}-\dots$$

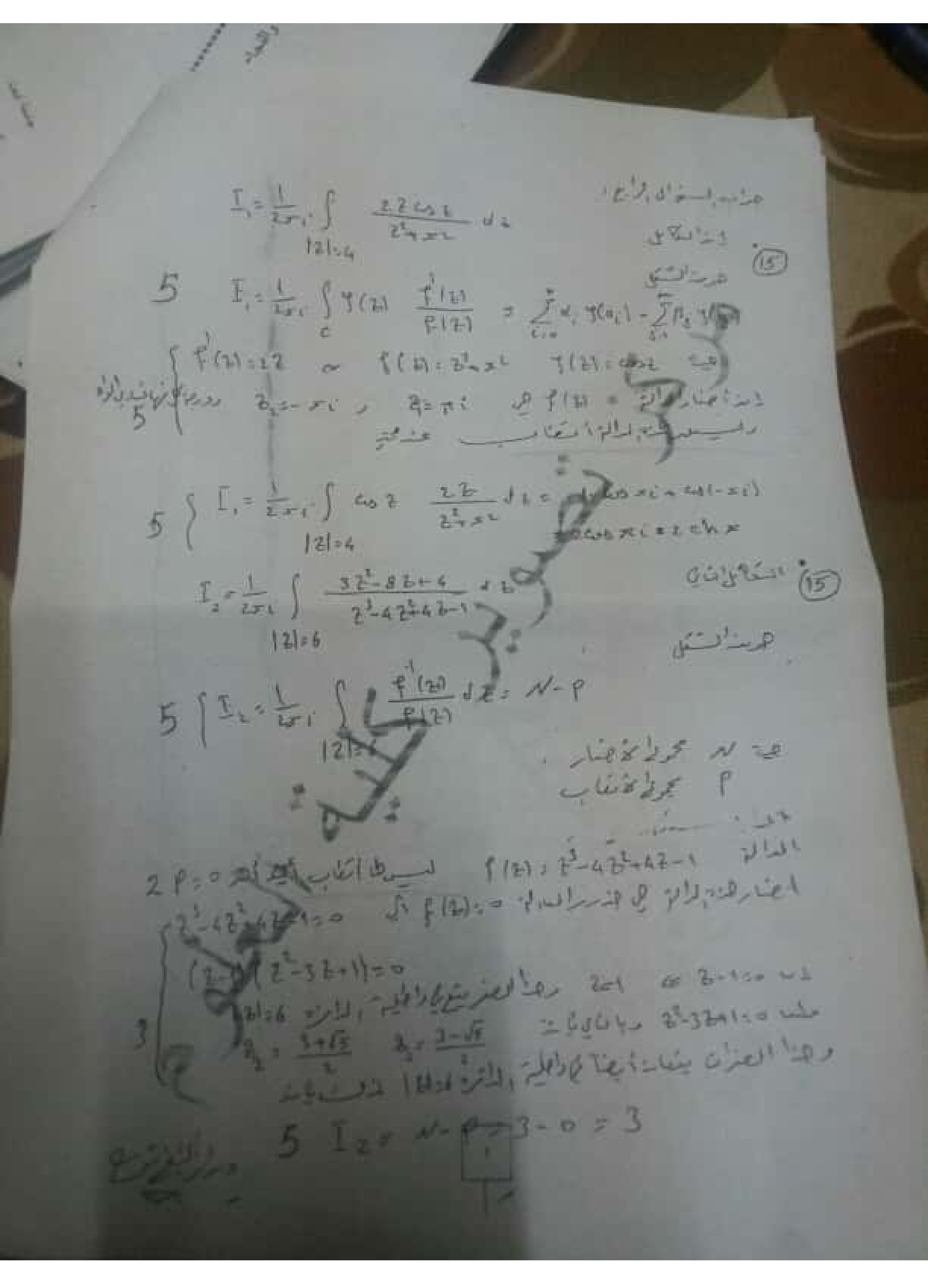
$$f(z)=(z+1)+2(z+1)^2+3(z+1)^3+\dots+n(1+z)^n+\dots-\frac{1}{z+1}$$

طريقة ثانية: استخدام ... المتسلسلات

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z+1)^n} \quad 0<|z+1|<1$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{(z+1)^{n+1}}dz \quad n=0,1,2,\dots \qquad b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{(z+1)^{-n+1}}dz \quad n=1,2,\dots$$

12



$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4} \frac{2z\cos z}{z^2+\pi^2}\,dz$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C g(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1} a_i\, g(a_i) - \sum_{i=1} b_i\, g(b_i)$$

$f'(z) = 2z \quad f(z) = z^2+\pi^2 \quad g(z) = \cos z$

$z_2 = -\pi i \quad , \quad z_1 = \pi i$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4} \cos z\,\frac{2z}{z^2+\pi^2}\,dz = \cos \pi i + \cos(-\pi i) = 2\cos \pi i = 2\cosh \pi$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=6} \frac{3z^2-8z+4}{z^3-4z^2+4z-1}\,dz$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=6} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P$$

حيث N عدد الأصفار ، P عدد الأقطاب

الدالة $f(z) = z^3-4z^2+4z-1$ ليس لها أقطاب $P = 0$

$z^3-4z^2+4z-1 = 0$

$(z-1)(z^2-3z+1) = 0$

$z_1 = 1$

$z^2-3z+1=0$

$z_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad z_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$|z|=6$

$$I_2 = N - P = 3 - 0 = 3$$